Teoremi

1 Integrabilità delle funzioni continue: sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale, $f \in C^0(D)$:
$$\Rightarrow \exists ! \iint_D f(x,y) \cdot dx \cdot dy \in \mathbb{R}$$

2 Nullità area grafico: sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua
$\Rightarrow$ il grafico di g è un insieme di misura nulla (area zero).
In generale un insieme D unione di domini piani normali $\{D_1, \ldots, D_m\}$ in numero finito, privi di punti interni in comune, è tale che la sua frontiera ha misura o area zero.

3 Integrabilità con discontinuità: siano D dominio normale in $\mathbb{R}^2$, f una funzione continua in D salvo un insieme di area nulla (segmenti), $|f(x,y)| \leq M$ $\forall (x,y) \in D$ con $M \in \mathbb{R}_+$, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$$\Rightarrow \exists \iint_D f(x,y) \, dx \, dy \in \mathbb{R}$$
La funzione f può essere discontinua solo in un numero finito di insiemi di area nulla.

4 Formule di riduzione degli integrali doppi: sia $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio normale rispetto all'asse x e sia $f \in C^0(D)$
$$\Rightarrow \iint_D f(x,y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) \, dy \in \mathbb{R}$$
Se invece D è dominio normale rispetto all'asse y:
$$\Rightarrow \iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y) \, dx \in \mathbb{R}$$

5 Teorema del cambiamento di variabile degli integrali doppi: sia T dominio normale sul piano xy e sia $\Psi : S \to \mathbb{R}^2$ con dominio normale sul piano uv tale che:
$$\Psi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in S \quad \text{e} \quad \Psi(S) = T \quad x, y \in C^1(S)$$
Ricordando la matrice jacobiana $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$, se $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, salvo un insieme di area zero.
$$\Rightarrow \iint_T f(x,y) \, dx dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du \, dv$$
Quindi Ψ deve essere biunivoca e $f \in C^0(T)$.

6 Teorema di rettificabilità delle curve: sia $\varphi[a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare e sia P una poligonale inscritta nella curva φ, allora:
- $L(P) \leq L(\varphi)$ $\forall$ P poligonale inscritta;
- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ P_ε poligonale inscritta in φ tale che $L(\varphi) - \varepsilon < L(P_\varepsilon)$

È la definizione di estremo superiore, cioè $L(\varphi) = \sup L(P)$

7a Condizione necessaria alla conservatività: condizione necessaria affinché $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, D aperto, $f \in C^1(D)$, F campo vettoriale, sia conservativo è che $\operatorname{rot} F = \underline{0}$.

Se F è conservativo, $\exists$ il potenziale. Cioè: $\exists u: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^1(D)$ t.c. $\nabla u = F$. Quindi $u_x = f_1$, $u_y = f_2$ se $F = (f_1, f_2)$. Poiché per il teorema di Schwarz $u_{xy} = u_{yx}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} F = \underline{0}$$

Infatti le derivate seconde miste sono continue (Hp per il teorema di Schwarz).

7b Conservatività di F campo vettoriale: sia $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, D aperto e semplicemente connesso, $F \in C^1(D)$, $\operatorname{rot} F = \underline{0}$ in D $\Rightarrow$ F è conservativo in D.

Se $\operatorname{rot} F = \underline{0}$, ma F non è semplicemente connesso in D si può solo dire che F è localmente conservativo in un intorno del punto (x_0, y_0) in cui $\operatorname{rot} F = \underline{0}$.

7c Potenziali di un campo: sia $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, D aperto e connesso, F conservativo in D, allora se $u: D \to \mathbb{R}$ è un potenziale di F, ogni altro potenziale differisce da u per una costante.

Se v è un altro potenziale di F si ha:

$$v = u + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Se u, v sono potenziali di F in D:

$$\nabla u = F, \quad \nabla v = F \Rightarrow \nabla u = \nabla v \Rightarrow \nabla(u - v) = 0$$

$$\text{in D connesso} \Rightarrow u - v = c \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow u = v + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Ciò per la linearità della derivata

7d Differenza di potenziale: sia $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, D aperto e connesso, F conservativo in D. Siano P_0 e P_1 punti di D e sia γ una curva regolare a tratti semplice che congiunge P_0 a P_1. Se $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ è una parametrizzazione di γ concorde col verso di percorrenza stabilito ($r(a) = P_0$ e $r(b) = P_1$)

e se il sostegno della curva è in D:

$$\int_\gamma F = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0)$$

In cui $P_0=(x_0,y_0)$ e $P_1=(x_1,y_1)$ e u è un potenziale di F in D.

Scriviamo:

$$\int_\gamma F = \int_a^b \left[f_1(x(t),y(t))\cdot x'(t) + f_2(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right] dt$$

Dove:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$ è una parametrizzazione di γ t.c. $P_0=(x(a),y(a))$ e $P_1=(x(b),y(b))$

Sappiamo che $\nabla u = F$, cioè $(u_x, u_y) = (f_1, f_2)$, cioè:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x(t),y(t))\, x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t),y(t))\, y'(t)\right] dt$$

È presente la funzione composta:

$$t \longrightarrow (x(t),y(t)) \xrightarrow{u} u(x(t),y(t))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}u(x(t),y(t)) = u_x\, x'(t) + u_y\, y'(t)$$

Allora:

$$\int_a^b \left\{\frac{d}{dt}u(x(t),y(t))\right\} dt = u(x(b),y(b)) - u(x(a),y(a)) =$$

$$= u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0)$$

L'integrale dipende solo dai punti iniziale e finale e non dal cammino compiuto.

7e Caratterizzazione dei campi vettoriali conservativi: Sia $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, F continua con D aperto. Siano $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ curve regolari a tratti con sostegno in D. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

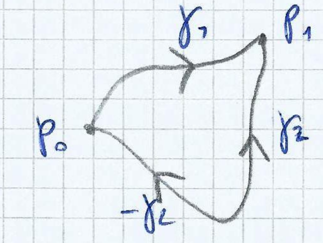
- F è conservativo in D;
- $\int_\gamma F = 0 \quad \forall \gamma$ curva chiusa;
- $\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F \quad \forall \gamma_1, \gamma_2$ semplici con lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale (e stesso verso di percorrenza).

F è conservativo $\Rightarrow \int_\gamma F = 0 \; \forall \gamma$ curva chiusa, infatti:

$$\int_\gamma F = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0) = 0 \quad \text{con } P_0 \equiv P_1$$

$\int_\gamma F = 0 \; \forall \gamma$ curva chiusa $\Rightarrow \int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \ldots$

Consideriamo:



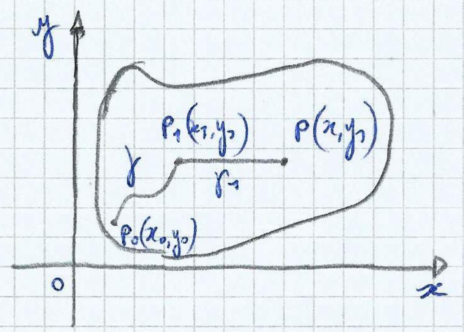
$\gamma_1 - \gamma_2$ è una curva regolare a tratti chiusa

$\Rightarrow$ per Hp $\displaystyle\int_{\gamma_1-\gamma_2} F = 0 = \int_{\gamma_1} F + \int_{-\gamma_2} F =$

$\displaystyle = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F$

$\displaystyle\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \dots \Rightarrow$ F è conservativo in D. Dobbiamo costruire un potenziale. Sia P_0 un punto fissato di D, $P_0(x_0, y_0)$, e sia P un punto qualsiasi di D, $P(x,y)$ e sia $u(x,y) = \int_{\gamma_{P_0P}} F$ dove γ_{P_0P} è una curva regolare a tratti con sostegno in D che unisce P_0 e P.

Per vedere se u è davvero un potenziale prendiamo $P_1(x_1, y_1)$, altro punto di D. Dobbiamo calcolare $\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y_1)$. Consideriamo allora $u(x, y_1)$:



$$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = y_1 \end{cases} \quad t \in [x_1, x]$$

$$u(x, y_1) = \int_{\gamma_{P_0P_1}} F + \int_{x_1}^{x} f_1(t, y_1)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} = 0 + f_1(x, y_1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_1, y_1)}{\partial x} = f_1(x_1, y_1)$$

Si prende poi il cammino verticale e si ottiene in modo analogo $\frac{\partial u(x_1, y_1)}{\partial y} = f_2(x_1, y_1)$

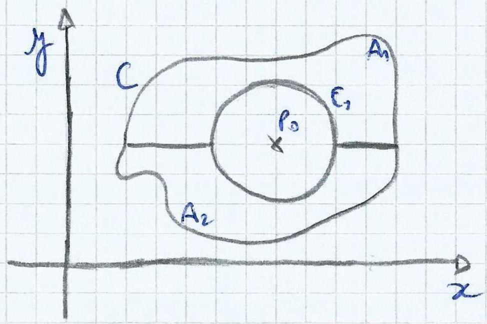
Ne segue che u è un potenziale per F. Per trovare un potenziale è quindi possibile integrare una delle componenti del campo, derivarla e vedere se viene l'altra componente!

7) Conservatività di campi vettoriali con domini bucati: sia $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale $F \in C^1(D)$, D connesso, non semplicemente connesso. In particolare D presenta un solo "buco limitato" ($\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$). Sia inoltre $\operatorname{rot} F = \underline{0}$ e $\int_{C_1} F = 0$, dove C_1 è una curva regolare a tratti con sostegno

in D chiusa, che "circonda" il buco:

$\Rightarrow$ F è conservativo in D

Consideriamo:

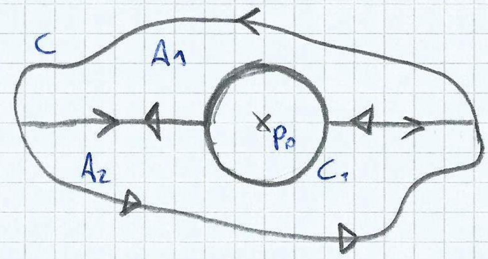


$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$

Prendiamo una $\forall$ altra curva chiusa C regolare a tratti con sostegno in D e che circonda P_0. Sia A la parte di piano compresa tra C e C_1 e sia $A = A_1 \cup A_2$. A_1 è un dominio connesso e semplicemente connesso così come A_2. Indicando con ∂A_1 la frontiera di A_1 e con ∂A_2 quella di A_2:

$$\int_{\partial A_1} F = 0 \qquad \int_{\partial A_2} F = 0$$

Stabiliamo le percorrenze delle frontiere:



$\partial A = C - C_1$

Quindi $\int_{\partial A} F = \int_{\partial A_1} F + \int_{\partial A_2} F = \int_C F + \int_{-C_1} F = \int_C F - \int_{C_1} F$

Ma $\int_{\partial A_1} F + \int_{\partial A_2} F = 0$, allora ($\int_{C_1} F = 0$ per Hp):

$$0 = \int_C F - \int_{C_1} F = \int_C F \Rightarrow \int_C F = 0 \ \forall c \text{ curva chiusa} \ldots$$

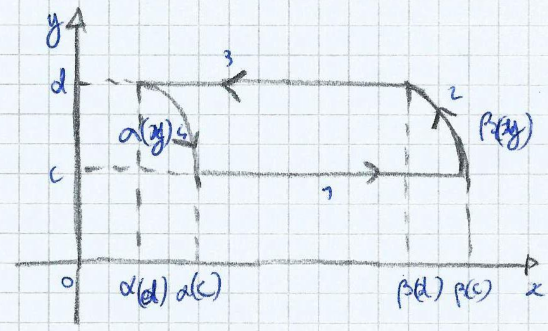
$\Rightarrow$ F è conservativo in D $\qquad$ cvd

7g Domini normali e versori: sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale regolare rispetto all'asse x. Se D è normale la frontiera di D è una curva regolare a tratti $\Rightarrow$ ammette versore normale e versore tangente salvo un numero finito di punti.

8a Formule di Gauss-Green: sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale regolare (oppure un'unione finita di domini normali regolari), sia $f = f(x,y)$ una funzione $C^1(D)$, $f: D \to \mathbb{R}$. Allora valgono:

- $\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\, dy = \int_{+\partial D} f \, dy$;
- $\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} \, dx\, dy = -\int_{\partial D} f \, dx$.

Consideriamo D dominio normale rispetto alla y:



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y),\ \alpha(y) \le \beta(y)\ \forall y \in [c,d],\ \alpha, \beta \in C^1([c,d])\}$

Si ha:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx = \int_c^d f(x,y)\Big|_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dy =$$
$$= \int_c^d \left[f(\beta(y), y) - f(\alpha(y), y) \right] dy$$

Abbiamo calcolato l'integrale sfruttando il potenziale. Ora parametrizziamo per calcolare $\int_{+\partial D} f \, dy$:

$$1: \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases} \quad t \in [\alpha(c), \beta(c)] \qquad 2: \begin{cases} x = \beta(t) \\ y = t \end{cases} \quad t \in [c,d]$$

$$-3: \begin{cases} x = t \\ y = d \end{cases} \quad t \in [\alpha(d), \beta(d)] \qquad -4: \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = t \end{cases} \quad t \in [c,d]$$

Quindi:

$$\int_{+\partial D} f \, dy = \cancel{\int_1 f \, dy} + \int_2 f \, dy - \cancel{\int_3 f \, dy} - \int_4 f \, dy =$$
$$= \int_c^d f(\beta(t), t)\, dt - \int_c^d f(\alpha(t), t)\, dt =$$
$$= \int_c^d \left[f(\beta(t), t) - f(\alpha(t), t) \right] dt = \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\, dy \text{ cvd}$$

8b Divergenza nel piano e flusso del campo: sia $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ tale che $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F \in C^1(D)$, D aperto. Allora si ha $\text{div}\, F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$. Inoltre disponiamo delle formule di Gauss - Green:

$$\iint_D \frac{\partial f_1}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{+\partial D} f_1\, dy \qquad \iint_D \frac{\partial f_2}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{+\partial D} - f_2\, dx$$

Sommiamo membro a membro:

$$\iint_D \text{div}\, F\, dx\, dy = \int_{+\partial D} f_1\, dy - f_2\, dx$$

Data la parametrizzazione:

$$\partial D = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Si ha:

$$\int_a^b \left[f_1(x(t), y(t)) \cdot y'(t) - f_2(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \right] dt$$

Normalizziamo:

$$\int_a^b \left(f_1(x(t), y(t)) \cdot \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} - f_2(x(t), y(t)) \cdot \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt =$$

$$= \int_{\partial D} F \cdot n_e\, ds$$

Abbiamo trovato n_e, versore normale esterno alla frontiera di D. L'integrale ottenuto rappresenta il flusso uscente del campo vettoriale F attraverso la frontiera del dominio D ed è uguale all'integrale doppio della divergenza.

8c Teorema di Stokes: sia $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ tale che $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, D aperto, $F \in C^1(D)$. Allora $\text{rot}\, \underline{F} = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \underline{k}$. Ora sommiamo le formule di Gauss - Green scritte nel modo seguente:

$$\iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{+\partial D} f_2\, dy \qquad -\iint_D \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{+\partial D} f_1\, dx$$

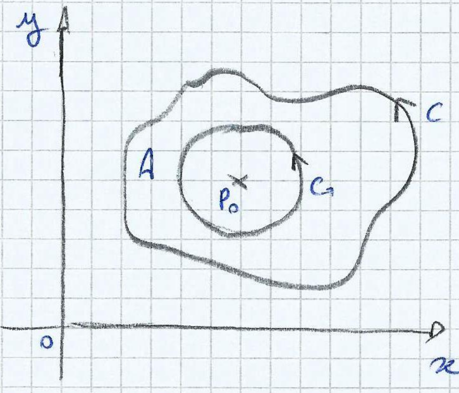
$$\Rightarrow \iint_D \text{rot}\, F \cdot k\, dx\, dy = \int_{+\partial D} F$$

La frontiera di D è orientata in modo da avere sempre il dominio sulla sinistra.

8d Dimostrazione rigorosa del teorema di conservatività dei campi vettoriali con domini bucati: sia $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo di classe $C^1(D)$, D aperto, $\operatorname{rot} \underline{F} = \underline{0}$ in D, D dominio normale regolare non semplicemente connesso e che presenta un solo "buco". Allora, se $\exists\ C_1$ curva regolare a tratti con sostegno in D che circondi il "buco" e tale che $\int_{C_1} F = 0$, F è conservativo in D.

Infatti, dal teorema del rotore precedente:

$$0 = \int_{+\partial D} F$$



Se A è la parte tra C_1 e C si ha:

$$0 = \int_{+\partial A} F = \int_C F - \int_{C_1} F = \int_C F$$

9 Cambiamento di variabile per gli integrali tripli: siano E e T domini regolari di $\mathbb{R}^3$ e sia ϕ l'applicazione:

$$\phi = \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \quad (u,v,w) \in T$$

Sia ϕ tale che $\phi: T \to \phi(T) = E$, $\phi \in C^1(T)$, ϕ invertibile. Inoltre sia la matrice jacobiana con determinante:

$$\det \frac{\partial \phi(u,v,w)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \neq 0$$

Eccetto al più un insieme di volume zero.
Allora, se $f \in C^0(E)$:

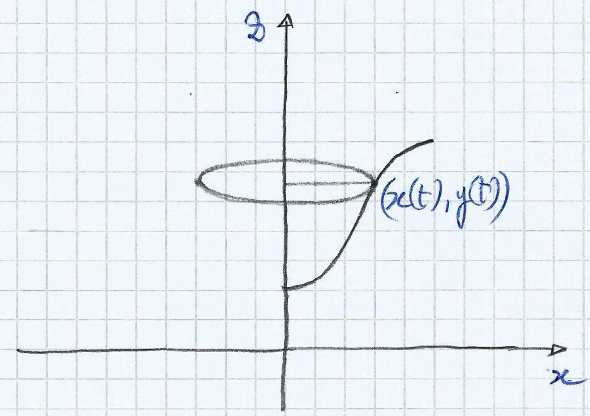
$$\iiint_{E=\phi(T)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \det \frac{\partial \phi(u,v,w)}{\partial(u,v,w)}\,dv\,du\,dw$$

10a Teorema di Guldino: sia T un solido ottenuto ruotando un dominio piano normale D attorno ad una retta r complanare a D che non taglia D. Allora il volume di T si ottiene moltiplicando l'area di D per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro di D nella rotazione:

$$\mathrm{Vol}T = \mathrm{area}D \cdot \alpha \cdot \frac{\iint_D x\,dx\,dz}{\mathrm{area}\,D} = \alpha \iint_D x\,dx\,dz$$

10b Teorema di Guldino per le superfici di rotazione: sia γ una curva regolare semplice su un piano ed r sia una retta complanare che non la interseca. Per semplicità supponiamo che il piano sia xz e che r sia l'asse z. Ruotiamo γ attorno a z di $\alpha \in [0, 2\pi]$. Otteniamo così una superficie di rotazione. Abbiamo, per definizione, $\gamma(t) = (x(t), z(t))$, $t \in [a,b]$, $x, z \in C^1$ con $(x'(t))^2 + (z'(t))^2 > 0$ $\forall t \in (a,b)$. Siccome γ non interseca l'asse z è lecito supporre $x(t) > 0$. Non comporta restrizioni

Vediamo le equazioni parametriche:



$$\varphi : \begin{cases} x = x(t)\cos\theta \\ y = x(t)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} t \in [a,b] \\ \theta \in [0,\alpha] \end{array}$$

$x(t) > 0 \Rightarrow$ in accordo con $\rho \geq 0$!

Quindi:

$$\mathrm{Area}(\varphi) = \iint_{[a,b]\times[0,\alpha]} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dt\,d\theta$$

Abbiamo che $\dfrac{\partial\varphi}{\partial(t,\theta)}$ è:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(t,\theta)} = \begin{pmatrix} x'(t)\cos\theta & -x(t)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x'(t)\,\mathrm{sen}\,\theta & x(t)\cos\theta \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Perciò:

$$A = -x(t)\cdot z'(t)\cdot\cos\theta \qquad B = -x(t)\cdot z'(t)\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$C = x(t)x'(t)(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)$$

Calcoliamo:

$$A^2+B^2+C^2 = x^2(t)(z'(t))^2 + x^2(t)\cdot(x'(t))^2 = x^2(t)\left[(z'(t))^2 + (x'(t))^2\right] > 0$$
$$\forall t \in (a,b)$$

Pertanto φ è una superficie regolare. Ne segue che:

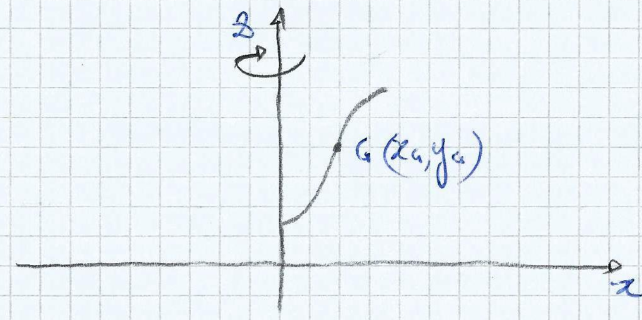
$$\text{Area}(\varphi) = \int_0^\alpha d\theta \int_a^b x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt =$$

$$= \alpha \int_a^b x(t)\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt = \alpha \int_\gamma x\,ds$$

Introducendo il baricentro della curva γ:

$$\text{Area}(\varphi) = \alpha \int_\gamma x\,ds = \alpha\, l(\gamma)\cdot\frac{\int_\gamma x\,ds}{l(\gamma)} = l(\gamma)\cdot\alpha\cdot x_G$$

L'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva piana γ attorno ad un asse complanare a γ che non la interseca è uguale alla lunghezza di γ per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro di γ nella rotazione.



11a Divergenza in $\mathbb{R}^3$: sia $T \subset \mathbb{R}^3$ un dominio normale, sia $S = \partial T$ (frontiera di T) che è una superficie regolare "a pezzi". Sia inoltre F un campo vettoriale di classe C^1 definito su T, cioè $F: T \to \mathbb{R}^3$, $F \in C^1(T)$. Allora:

$$\iiint_T \operatorname{div} F\, dx\,dy\,dz = \int_{S=\partial T} F\cdot n_e\cdot dS$$

Dove $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ e n_e è il versore normale esterno alla frontiera di T.

Le superfici devono essere chiuse. Se sono aperte bisogna chiuderle e poi sottrarre il flusso attraverso la superficie che è stata aggiunta.

11b Teorema di Stokes o del rotore in $\mathbb{R}^3$: sia $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con D con D dominio connesso, una superficie regolare (o regolare a pezzi) con bordo. Sia F un campo vettoriale di classe C^1 definito almeno su $S = \varphi(D)$.

Allora:

$$\int_S \operatorname{rot} F\cdot n\, dS = \int_{+\partial S} F$$

12a Teorema di esistenza ed unicità "in piccolo" della soluzione di un problema di Cauchy: dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \quad \text{con } F: T \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$$

Devono essere:

- $T = \{(x, Y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, \ \|Y - Y_0\| \leq b, \ a, b > 0\}$;
- $F \in C^0(T)$ con derivate rispetto alle componenti di Y continue ($F \in C^1(T)$)

Sotto queste condizioni il problema ha una e una sola soluzione $Y \in C^1$ definita in un intorno di x_0 di ampiezza $\delta > 0$. Tale $\delta \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$ con norma di F $\|F(x, Y)\| \leq M$. $M \in \mathbb{R}$ esiste perché F è continua in T e T è chiuso e limitato (Weierstrass).

Se F è solo continua vale il teorema di Peano: la soluzione esiste ma può non essere unica.

12b Teorema di esistenza e unicità "in grande" della soluzione di un problema di Cauchy: sia:

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

un problema di Cauchy in forma normale con F definita e di classe C^1 in $S\{(x, Y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, \ a > 0, \ Y \in \mathbb{R}^n\}$. Allora $\exists!$ soluzione definita in $|x - x_0| \leq a$, se è verificata almeno una delle due condizioni seguenti:

- $\|F(x, Y)\| \leq M \quad \forall (x, Y) \in S$
- le derivate di F rispetto alle componenti di Y sono limitate in S.

12c Linearizzazione totale: data la funzione $f_1(x, y_1, \dots, y_n)$, la linearizzazione totale (rispetto a tutte le variabili) di f_1 si ha sostituendo ad essa la funzione:

$$f_1(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)(x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y_1^0, \dots, y_n^0)(y_1 - y_1^0) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)(y_n - y_n^0) = P(x, y_1, \dots, y_n)$$

12d Linearizzazione parziale: data la funzione $f_1(x, y_1, \dots, y_n)$ la linearizzazione parziale (rispetto a $y_1, \dots, y_n$) di f_1 si ha sostituendo a f_1 stessa la funzione:

$$f_1(x, y_1^0, \dots, y_n^0) + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y_1^0, \dots, y_n^0)(y_1 - y_1^0) + \dots +$$
$$+ \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x, y_1^0, y_2^0)(y_n - y_n^0)$$

12e Combinare le soluzioni di un sistema omogeneo: se Y_1 e Y_2 sono due soluzioni del sistema omogeneo associato a quello completo, allora $Y_1 + Y_2$ e cY sono ancora soluzioni del sistema omogeneo (non del problema di Cauchy). Considerato:

$$G_0 = \{ Y \in C^1(I), Y \text{ soluzione del sistema omogeneo} \}$$

È un sottospazio vettoriale di dimensione 2. Se il sistema ha n equazioni, cioè si cerca $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ soluzione $\Rightarrow G_0$ ha dimensione n.

Tutte le soluzioni del sistema omogeneo si ottengono combinandone due particolari linearmente indipendenti tra loro.

Si ottiene la matrice fondamentale o wronskiana ϕ:

$$Y_{om}(x) = \phi(x) \cdot C \quad \text{con } C \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \phi = \left(\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} \right)$$

Essa ha per colonne due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo. Esistono infinite ϕ.

12f Tutte le soluzioni di un sistema non omogeneo: se si ha un sistema lineare a coefficienti continui non omogeneo allora tutte le soluzioni sono date da:

$$Y(x) = \bar{Y}(x) + Y^*(x) = \phi(x) \cdot C + Y^*(x)$$

Dove $Y^*(x)$ è una soluzione particolare del sistema non omogeneo. Si verifica che:

$$Y^*(x) = \phi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(t) \cdot b(t) \cdot dt \quad x_0 \in I$$

ϕ^{-1} esiste in quanto le colonne di ϕ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \det \phi(x) = W(x)$ (wronskiano) $\neq 0 \Rightarrow \phi$ invertibile.

12g Teorema di Liouville: se Y_1, Y_2 sono due soluzioni del sistema omogeneo, allora sono equivalenti:

- Y_1 e Y_2 sono linearmente indipendenti;
- $\det \phi(x) = W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$;
- $W(x_0) \neq 0$ con $x_0 \in I$.

12h Soluzione particolare del sistema non omogeneo: per trovare la soluzione particolare usiamo la formula:

$$Y^*(x) = \phi(x) \int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(t)\, B(t)\, dt, \quad x_0 \in I$$

In cui $\phi^{-1}(t)$ e $B(t)$ sono continue in I, quindi lo è anche il loro prodotto. Lo è anche $\phi(x)$. L'integrale esiste poiché l'integranda è continua (per il teorema fondamentale del calcolo integrale). Quindi $Y^* \in C^1(I)$.
Deriviamo e vediamo se l'integrale visto prima è soluzione del sistema lineare a coefficienti continui:

$$Y^{*\prime}(x) = \phi'(x) \int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(t) \cdot B(t) \cdot dt + \phi(x) \cdot \phi^{-1}(x) \cdot B(x) =$$

$$= A(x) \cdot \phi(x) \int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(t) \cdot B(t) \cdot dt + B(x)$$

Infatti le componenti di $\phi'(x)$ sono soluzioni: $\phi'(x) = A(x) \cdot \phi(x)$. Allora:

$$Y^{*\prime}(x) = A(x) \cdot Y(x) + B(x)$$

12i Unica soluzione del problema di Cauchy con sistema omogeneo: sia il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x) \cdot Y(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Associato a un sistema omogeneo la costante c si determina nel modo seguente. Si sa che l'integrale generale del sistema omogeneo è $Y(x) = \phi(x) \cdot c$. Siccome $Y(x_0) = Y_0$ deve verificarsi:

$$Y_0 = \phi(x_0) \cdot c \implies c = \phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0$$

Allora l'unica soluzione del problema in oggetto, con $A \in C^0(I)$, I intervallo, $x_0 \in I$, è data da:

$$Y(x) = \phi(x) \cdot \phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0$$

12l Unica soluzione del problema di Cauchy con sistema non omogeneo: sia il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x) \cdot Y(x) + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Con $A \in C^0(I)$, $B \in C^0(I)$, I intervallo, $x_0 \in I \implies$ l'unica soluzione del problema è data da:

$$Y(x) = \phi(x) \left[\phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(t) \cdot B(t) \cdot dt \right.$$

12m Integrale generale di un sistema omogeneo: in definitiva la soluzione è:

$$Y(x) = \phi(x)\left[C + \int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(t) \cdot B(t) \cdot dt\right]$$

Con $x_0 \in I$, $C \in \mathbb{R}^2$. Quando il sistema differenziale lineare ha omogeneo associato a coefficienti costanti la matrice $A(x)$ è una matrice costante

12m Procedura di soluzione di un sistema differenziale lineare con omogeneo associato a coefficienti costanti: sia:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}\, y_1(x) + a_{12}\, y_2(x) \\ y_2'(x) = a_{21}\, y_1(x) + a_{22}\, y_2(x) \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R} \quad i, j = 1, 2$

Si cercano soluzioni del tipo $Pe^{\lambda x}$ con P vettore non nullo, $\lambda \in \mathbb{C}$. Scriviamo $Y'(x) = A\,Y(x)$ quindi:

$$\lambda P e^{\lambda x} = A P e^{\lambda x} \Leftrightarrow A P e^{\lambda x} - \lambda P \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow (A - \lambda) P \cdot e^{\lambda x} = 0$$

L'esponenziale complesso, come quello reale, è sempre non nullo. Allora:

$$(A - \lambda I) \cdot P = 0 \qquad e^{\lambda x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Fissato $\lambda \in \mathbb{C}$, $(A - \lambda I)\,P = 0$ rappresenta un sistema algebrico le cui incognite sono le componenti di P. Nel caso di dimensione 2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = 0$$

Oppure, sotto forma di sistema:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) P_1 + a_{12} P_2 = 0 \\ a_{21} P_1 + (a_{22} - \lambda) P_2 = 0 \end{cases}$$

La soluzione esiste se $\det(A - \lambda I) = 0$. Si cercano gli autovalori λ della matrice dei coefficienti A. È l'equazione caratteristica. Sussistono tre casi in dimensione due poiché l'equazione caratteristica è di secondo grado:

- l'equazione caratteristica ha due soluzioni reali e distinte $(\Delta > 0)$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Allora le soluzioni del sistema lineare omogeneo sono del tipo:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \\ y_2(x) = C_3 e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_2 x} \end{cases}$$

Con C_3 e C_4 (oppure C_1 e C_2) da determinarsi in funzione delle altre due sostituendo nel sistema omogeneo dato (cioè imponendo che il sistema sia soluzione);

- l'equazione caratteristica ha due soluzioni reali e coincidenti ($\Delta=0$) $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$. Allora le soluzioni del sistema omogeneo sono del tipo (con $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$):

$$\begin{cases} y_1(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x} \\ y_2(x)=C_3e^{\lambda x}+C_4xe^{\lambda x} \end{cases}$$

Determinando due costanti in funzione delle altre due imponendo che $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ sia soluzione del sistema;

- l'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate, $\lambda_{1,2}=a\pm ib$ ($\Delta<0$). Allora le soluzioni del sistema omogeneo sono del tipo:

$$\begin{cases} y_1(x)=e^{ax}\left[C_1\cos(bx)+C_2\,\mathrm{sen}(bx)\right] \\ y_2(x)=e^{ax}\left[C_3\cos(bx)+C_4\,\mathrm{sen}(bx)\right] \end{cases}$$

Con C_1, C_2, C_3 e C_4 da determinarsi sostituendo nel sistema (due costanti in funzione delle altre due).

13a Equazioni di Eulero e metodo di soluzione: equazione di Eulero di ordine 3:

$$ax^3y'''(x)+bx^2y''(x)+cxy'(x)+dy(x)=f(x)$$

Con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $f\in C^0(I)$, I intervallo. Per l'ordine 2 (con le stesse condizioni, a parte per la d, che non c'è):

$$ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=f(x)$$

In forma normale l'equazione diviene:

$$y''(x)=\frac{1}{ax^2}\left[-bxy'(x)-cy(x)+f(x)\right] \quad x\neq 0$$

Quindi deve essere $x>0$ o $x<0$. Il problema di Cauchy associato è:

$$\begin{cases} ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \end{cases} \qquad x_0>0 \text{ o } x_0<0$$

Se $x_0=0$ non si sa se $\exists$ la soluzione. Bisogna cercare la soluzione per $x_0>0$ e $x_0<0$ e prolungarla, se possibile, in zero.

Se $x_0>0$ si pone $x=e^t>0$:

$$ae^{2t}y''(e^t)+be^ty'(e^t)+cy(e^t)=f(e^t)$$

Chiamiamo $y(e^t) = z(t)$:

$$z(t) = y(e^t) \qquad z'(t) = y'(e^t) \cdot e^t \qquad z''(t) = y''(e^t) \cdot e^{2t} + y'(e^t) \cdot e^t$$

$$\Rightarrow \quad y''(e^t) \cdot e^{2t} = z''(t) - z'(t)$$

Allora:

$$a\left(z''(t) - z'(t)\right) + b\, z'(t) + c\, z(t) = f(e^t)$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} a\, z''(t) + (b-a)\, z'(t) + c\, z(t) = f(e^t) \\ z(t_0) = y_0 \\ z'(t_0) = y_1 e^{t_0} \end{cases}$$

Infatti:

$$y(e^{t_0}) = y_0 \Rightarrow z(t_0) = y_0 \quad e \quad z'(t_0) = y'(e^{t_0}) \cdot e^{t_0}$$

Se $x_0 < 0$ si pone $x = -e^t$ e si procede come nel caso precedente.

13b Equazioni di Bernoulli e metodo di soluzione: sono del tipo:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \cdot [y(x)]^{\alpha} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Con $a, b \in C^0(I)$, I intervallo. Le condizioni iniziali unite all'equazione di Bernoulli danno il problema di Cauchy. Per non ridurci ai casi già visti l'anno scorso poniamo $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ (equazione lineare). Inoltre:

- se $\alpha \in \mathbb{Z}$, $y_0 \neq 0$;
- se $\alpha \in \mathbb{R} / \mathbb{Z}$, $y_0 > 0$.

Dividiamo ora per $y^{\alpha}(x)$ l'equazione:

$$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} = a(x) \left[y(x)\right]^{1-\alpha} + b(x)$$

Poniamo $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$:

$$z'(x) = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}(x) \cdot y'(x) = (1-\alpha) \cdot \frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)}$$

Quindi:

$$\begin{cases} z'(x) = (1-\alpha) \cdot a(x) \cdot z(x) + (1-\alpha) \cdot b(x) \\ z(x_0) = y_0^{1-\alpha} \end{cases}$$